ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Θέμα Α

A_1 Θεωρία
A_2 Θεωρία
A_3 Θεωρία
A_4 $\alpha \to \Sigma$, $\beta \to \Sigma$, $\gamma \to \Lambda$, $\delta \to \Lambda$, $\varepsilon \to \Sigma$

Θέμα Β

B_1 $z + \dfrac{2}{z} = 2 \Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0$, επομένως $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 1 + i$

B_2 $z_1^{2010} + z_2^{2010} = (1-i)^{2010} + (1+i)^{2010} = (1-i)^{2010} + \left(i(1-i)\right)^{2010} =$

$$= (1-i)^{2010} + i^{2010}(1-i)^{2010} = (1-i)^{2010} - (1-i)^{2010} = 0$$

B_3 $|w - 4 + 3i| = |1 - i - 1 - i| \Leftrightarrow |w - 4 + 3i| = 2$, επομένως οι εικόνες των μιγαδικών w ανήκουν σε κύκλο κέντρου $K(4,-3)$ και ακτίνας $\rho = 2$.

B_4 $(OK) - \rho \le |w| \le (OK) + \rho \Leftrightarrow 5 - 2 \le |w| \le 5 + 2 \Leftrightarrow 3 \le |w| \le 7$

$(OK) = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$.

Θέμα Γ

Γ_1 f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2 + \dfrac{2x}{x^2+1} = 2\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1} > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Επομένως f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Γ_2 $2x^2 - 2(3x-2) = \ln\left[(3x-2)^2 + 1\right] - \ln\left(x^4+1\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + \ln\left(x^4+1\right) = 2(3x-2) + \ln\left[(3x-2)^2+1\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(x^2\right) = f(3x-2) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

επομένως $x = 1$ ή $x = 2$.

Γ_3 f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = 2\dfrac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = 2\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$

		-1		1	
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f					

Η f έχει σημεία καμπής τα $A(-1,-2+\ln 2)$, $B(1,2+\ln 2)$

Εφαπτομένη στο Α $(\varepsilon_1): y = x - 1 + \ln 2$, η εφαπτομένη στο Β $(\varepsilon_2): y = 3x - 1 + \ln 2$ που τέμνονται στο $\Gamma(0,-1+\ln 2) \in yy'$

Γ₄ $I=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}x^2\right)' f(x)dx=\left[\frac{1}{2}x^2 f(x)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{x^4+x^3+x^2}{x^2+1}dx$

Με διαίρεση πολυωνύμων ή με τέχνασμα οδηγούμε στο

$$I=\left[\frac{1}{2}x^2 f(x)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{(x^2+1)(x^2+x)-x}{x^2+1}dx=2-\int_{-1}^{1}(x^2+x)dx+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx=$$

$$=2-\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}+\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_{-1}^{1}=\frac{4}{3}.$$

Θέμα Δ

Δ₁ f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα $\frac{t}{f(t)-t}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $0, x\in\mathbb{R}$ επομένως

$\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $x+3$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα f

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=1+\frac{x}{f(x)-x}=\frac{f(x)}{f(x)-x}$.

Δ₂ f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τότε g παραγωγίσιμη στο f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$g'(x)=2f(x)f'(x)-2f(x)-2xf'(x)=\frac{2f^2(x)}{f(x)-x}-2f(x)-\frac{2xf(x)}{f(x)-x}=0$$

Επομένως η συνάρτηση g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$

Δ₃ Υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ ώστε $g(x)=c$ και $g(0)=9\Leftrightarrow c=9$, επομένως

$g(x)=9\Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2=9+x^2\Leftrightarrow (f(x)-x)^2=9+x^2\ (1)$

Η $\varphi(x)=f(x)-x\neq 0$ και φ συνεχής στο $\mathbb{R}$ επομένως η φ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή $\varphi(0)=3>0$, τότε $\varphi(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Επομένως (1) $f(x)-x=\sqrt{x^2+9}\Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2+9}$.

Δ₄ Έστω $h(x)=\int_x^{x+1}f(t)dt=\int_0^{x+1}f(t)dt-\int_0^x f(t)dt$ που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=f(x+1)-f(x)$.

Αλλά $f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}}>0$, άρα f γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$

(γιατί: $\sqrt{x^2+9}>\sqrt{x^2}=|x|\geq 0$)

Επομένως $f(x+1)>f(x)\Leftrightarrow h'(x)>0$, δηλ. h γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε

$h(x)<h(x+1)\Leftrightarrow \int_x^{x+1}f(t)dt<\int_{x+1}^{x+2}f(t)dt$. _